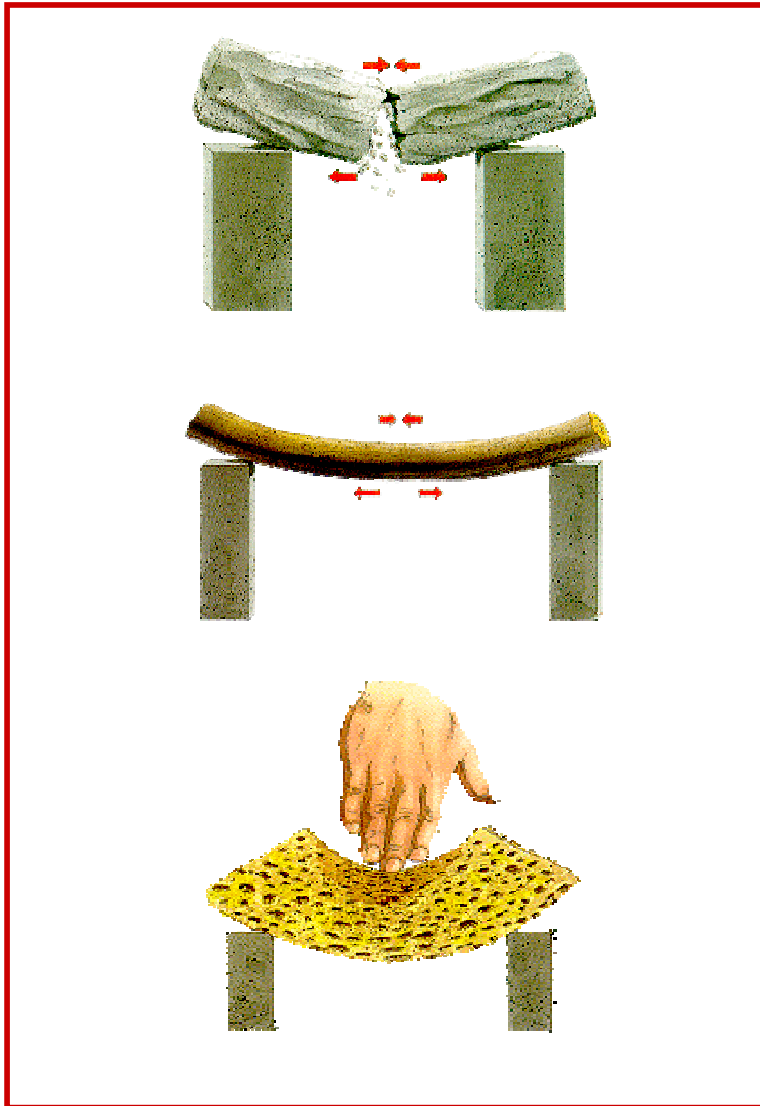


## Proprietà fisico-meccaniche dei materiali reologia dello stato solido



Chiara Cevoli

## REOLOGIA

La reologia è la scienza che studia le relazioni tra i carichi (tensioni) ed il relativo campo di spostamenti (deformazioni) indotto nei materiali.

La reologia si occupa di materiali allo stato solido, fluido o intermedio.

Nella distinzione tra solido e liquido possiamo intraprendere diversi approcci: il primo approccio è di tipo empirico poiché distinguiamo un solido in quanto è dotato di forma propria, a differenza di un liquido che assume la forma del contenitore nel quale si trova (in termini energetici possiamo dire che per deformare un solido è necessario spendere una maggiore quantità di energia).

Il secondo approccio è di tipo più sperimentale (numero di Deborah):

$$De = \text{tempo di rilassamento del materiale} / \text{tempo di osservazione del fenomeno}$$

$t_r$  = tempo necessario per l'annullamento delle tensioni a deformazione imposta

I fluidi con valori di Deborah prossimi a zero hanno comportamento analogo ai liquidi.

I fluidi con valori di Deborah tendenti ad infinito hanno comportamento analogo ai solidi.

Il nome deriva dal versetto "Le montagne si scioglieranno davanti al Signore" da un salmo della profetessa Debora riportata nella Bibbia (Giudici 5,5). Infatti alcuni materiali apparentemente solidi si comportano come fluidi se osservati sufficientemente a lungo (aumento del valore del denominatore).

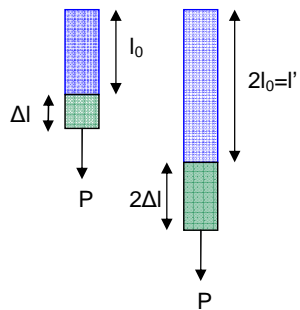
Com'è facile intuire dalla definizione il concetto di solido e liquido è relativo: un  $De \gg 1$  definisce un comportamento rigido del materiale che normalmente è tipico dello stato solido ma per tempi brevissimi di osservazione è caratteristico anche di un liquido (es. impatti molto rapidi su una superficie d'acqua producono effetti simili a impatti su superfici solide), mentre un  $De \ll 1$  generalmente è associato ai fluidi ma, come è stato già detto, il tempo di osservazione è fondamentale poiché in tempi molto lunghi anche il solido assume certi aspetti tipici dei liquidi (es. i pannelli in vetro di chiese molto antiche hanno nella parte bassa una sezione maggiore, come se il vetro fosse "colato" verso il basso).

### Trazione e compressione – tensione normale e deformazione

- caratterizzazione dell'azione di una forza (vettore applicato) e di un sistema di forze distribuito su un'area;
- richiami sulla definizione di pressione e tensione meccanica normale.

L'applicazione di una forza di trazione, diretta perpendicolarmente ad una faccia di un provino (solido), comporta il suo allungamento (simmetricamente per la compressione).

Da prove di laboratorio si osserva che il provino di area doppia si rompe con un carico doppio, cioè esiste una dipendenza lineare tra forza e area di applicazione, a prescindere dalle caratteristiche geometriche. Il rapporto  $F/A$  è chiamato  $\sigma$ . L'unità di misura è il  $N/m^2$ , ovvero il Pa.



Applicando lo stesso carico  $P$  l'allungamento assoluto è maggiore nel provino più lungo ( $l$ ) ma l'allungamento relativo  $\epsilon$  è lo stesso

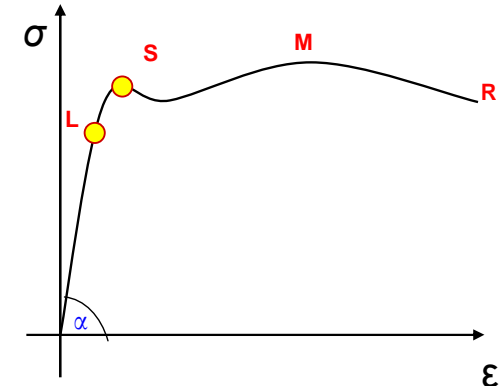
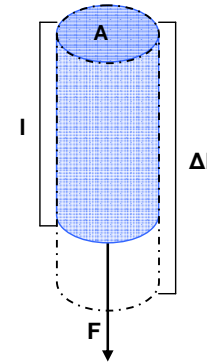
Def deformazione:  $\epsilon = 2\Delta l / 2l_0 = \Delta l / l_0$

Dunque per caratterizzare il **materiale**, indipendentemente da forma e dimensioni del corpo, si utilizzano tensione e deformazione in luogo di forza e spostamento.

Considerando un cilindro sottile di sezione iniziale  $A$  soggetto ad una forza di trazione  $F$ , assunta uniforme la distribuzione di tensione indotta nella generica sezione e trascurando le variazioni che tale tensione subisce, al variare di  $F$ , per effetto delle variazioni dell'area della sezione del campione, risulta che:

$$\sigma = F/A \quad \sigma = \text{tensione nominale (Pa)}$$

$$\epsilon = \Delta l / l \quad \epsilon = \text{deformazione relativa all'allungamento del campione}$$



Un grafico forza-spostamento esprime il comportamento di un provino, mentre il grafico tensione-deformazione è riferito al materiale.

Per numerosi materiali (ad esempio l'acciaio) il grafico è con ottima approssimazione una retta uscente dall'origine delle coordinate, per valori della tensione inferiori ad una soglia che definisce il limite del comportamento elastico lineare (punto L). Dunque:

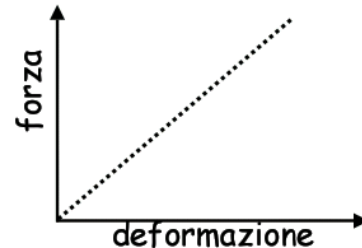
$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \text{Legge di Hooke}$$

con  $E$ , costante di proporzionalità nota come *modulo di Young* ( $E = \tan \alpha = \sigma / \epsilon$ ). Entro tale limite, rimuovendo la sollecitazione cui il campione è soggetto, la deformazione praticamente scompare (nel senso che l'entità della deformazione permanente residua è trascurabile su scala macroscopica).

## Legge Di Hooke

se la deformazione di un corpo prodotta da una forza gradatamente crescente, varia in modo proporzionale alla forza, si dice che il materiale del corpo segue la legge di Hooke

il materiale ha un comportamento lineare



Una risposta simile è tipica dei materiali elastici ma anche di qualsiasi materiale che venga sottoposto a deformazioni entro il limite di elasticità (stato di elasticità). La relazione che lega la tensione con la deformazione è il modulo di elasticità della legge di Hooke:  $\sigma = \epsilon E$ . Più  $E$  è alto più il materiale è rigido, infatti possiamo considerare il modulo di elasticità come la forza necessaria per ottenere una deformazione unitaria.

Dunque un corpo può essere in termini generali definito come solido elastico se possiede la proprietà di riacquistare la sua forma iniziale non appena le forze responsabili della sua deformazione vengono rimosse.

La teoria della elasticità per i solidi cristallini è molto complessa dal punto di vista matematico, in quanto in generale l'effetto di una sollecitazione meccanica dipende dalla sua direzione rispetto al sistema cristallino, ed occorre fare uso di metodi di calcolo tensoriale. Per semplicità vengono qui considerati esclusivamente i materiali *isotropi* e *mediamente omogenei*.

Il comportamento elastico di un materiale può essere lineare in un certo intervallo della deformazione e assumere un andamento non lineare per valori più elevati. Il carattere elastico del materiale, anche se non lineare, implica che il campione soggetto a cicli di carico e scarico segue sempre la stessa curva del piano ( $\sigma, \epsilon$ ) e non presenta al termine alcuna deformazione residua.

Aumentando la tensione  $\sigma$  oltre il limite elastico, il campione raggiunge uno stato nel quale improvvisamente subisce un incremento della deformazione senza riuscire a reagire aumentando la tensione: è il cosiddetto limite di snervamento o yelding point o bioyelding point per i materiali biologici (punto S). bioyeld (punto di snervamento biologico): lo snervamento in genere è tipico di materiali cristallini come i metalli, nei quali dal punto di vista microscopico si osserva la dislocazione dei grani. Nei materiali biologici invece si verifica la rottura contemporanea di molte pareti cellulari.

Per valori ulteriormente crescenti di  $\sigma$  il campione subisce dilatazioni significative fino al raggiungimento della tensione massima che il campione è in grado di sopportare (punto M).

Per i materiali fragili il punto M coincide con il punto di rottura. Per i materiali duttili, invece, valori ulteriormente crescenti della deformazione sono associati ad una forte riduzione di sezione su una piccola parte della lunghezza del campione.

L'effettiva tensione cui il campione è soggetto cresce malgrado diminuisca la forza di trazione ( $e$ , quindi, la tensione nominale) a causa della strizione della sezione trasversale. Il punto di rottura si raggiunge per valori della deformazione più elevati (punto R).

- deformazione residua; isteresi

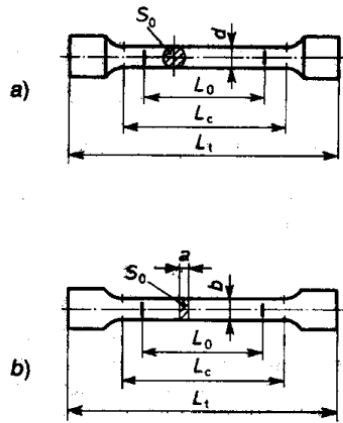


Figura 2: Provini per prove di trazione: a) sezione circolare; b) sezione rettangolare

Notare la sagomatura degli afferraggi, realizzata al fine di ridurre l'effetto di concentrazione di tensioni.

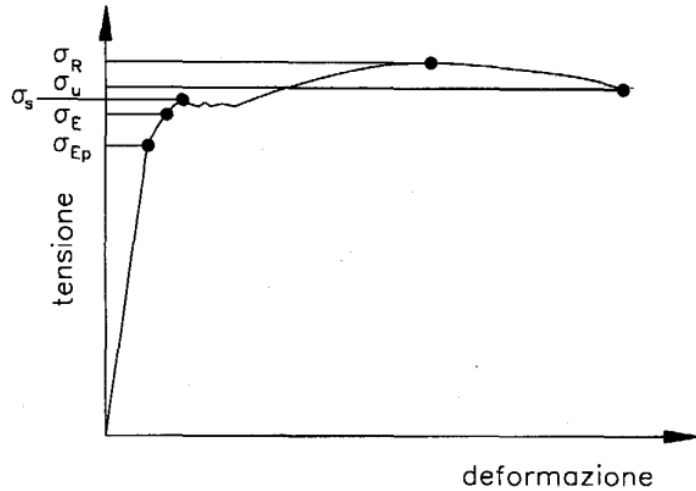
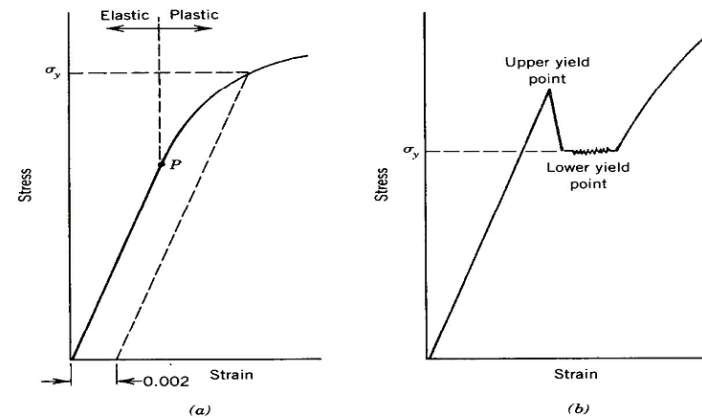


Figura 3: Tipico diagramma  $\sigma$ - $\epsilon$  per un acciaio a basso tenore di carbonio

## Punto di snervamento



- a. Definizione punto di snervamento ingegneristico (0.2% di deformazione plastica residua)
- b. Punto di snervamento e bande di scorrimento nei metalli duttili

# Deformazione plastica

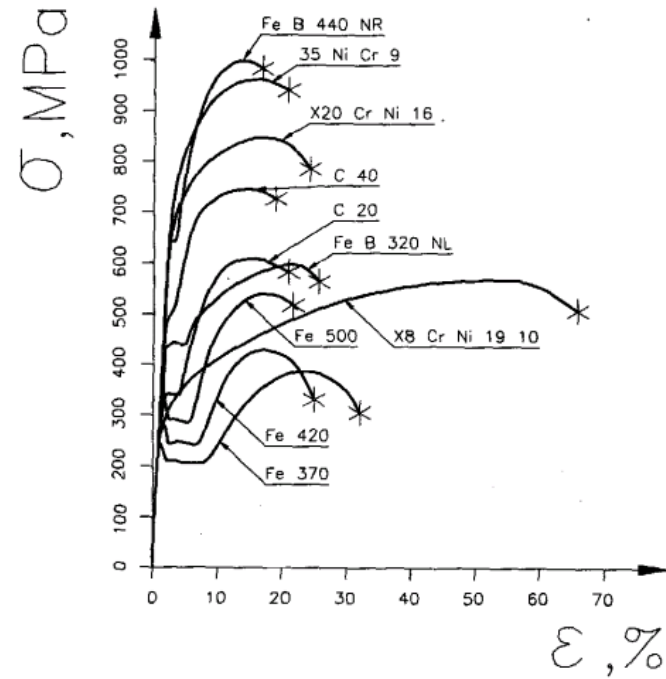
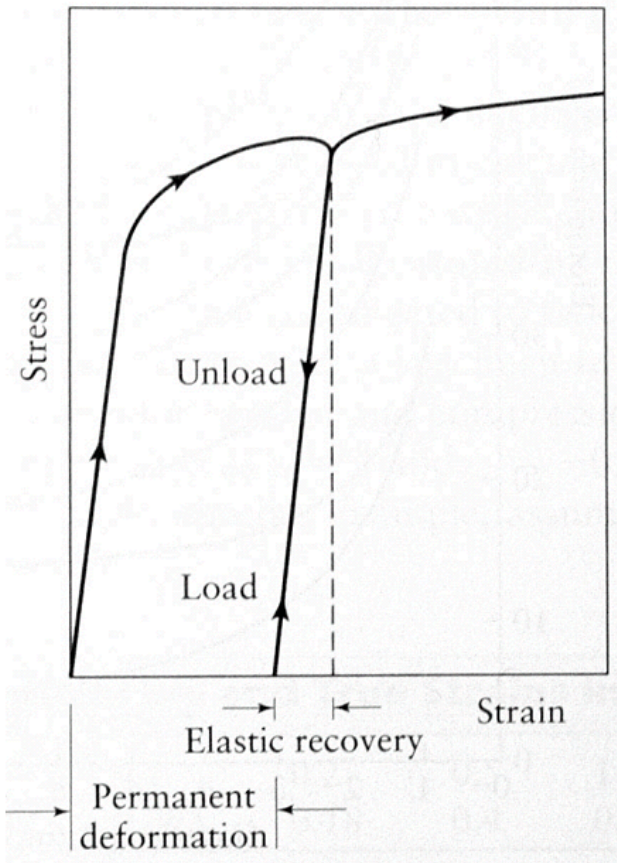


Figura 4: Diagrammi  $\sigma$ - $\epsilon$  per acciai.

## Isteresi



# Duttile-Fragile

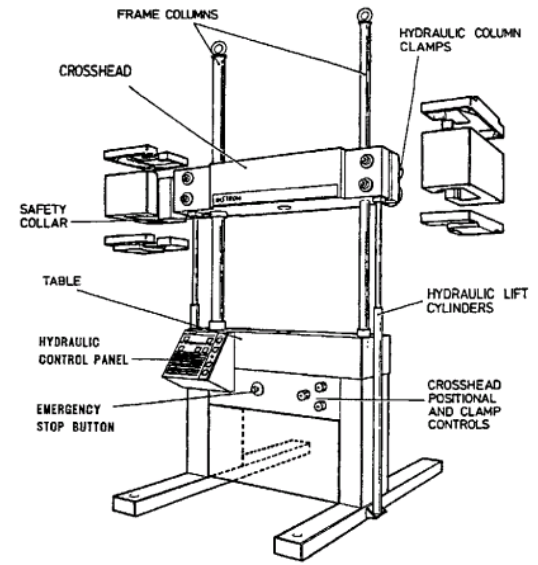
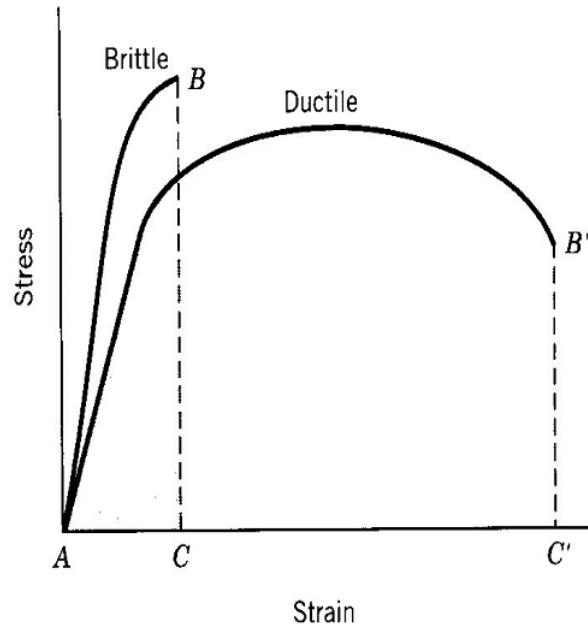


Figura 7: Telaio di macchina di prova a due montanti (INSTRON Ltd.)

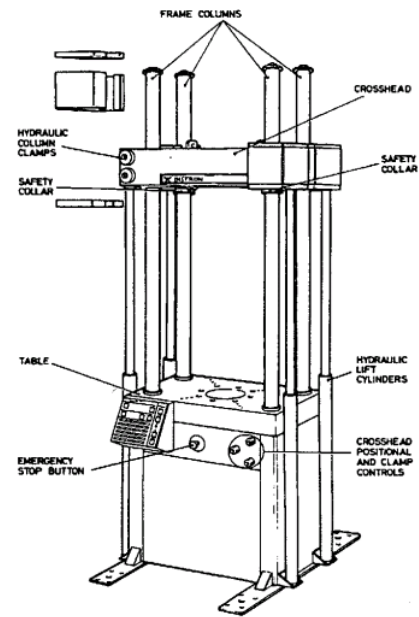


Figura 8: Telaio di macchina di prova a quattro montanti (INSTRON Ltd.)

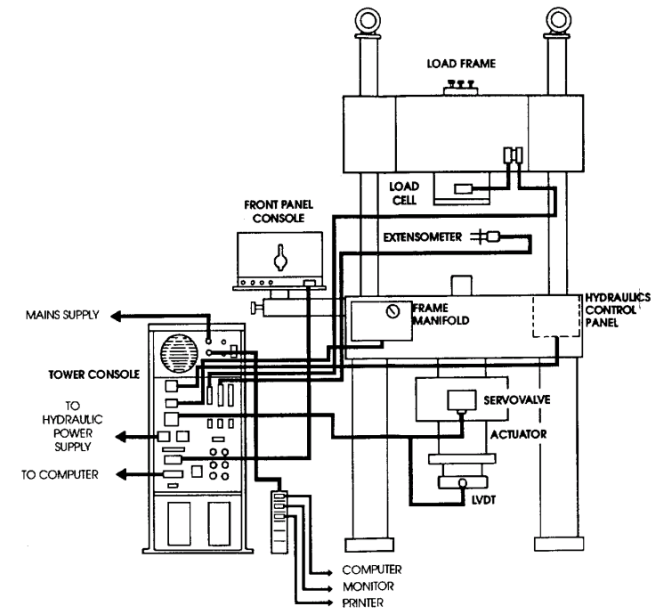


Figura 9: Schema di principio di una macchina di prova ad azionamento oleodinamico e controllo elettronico (INSTRON Ltd.)

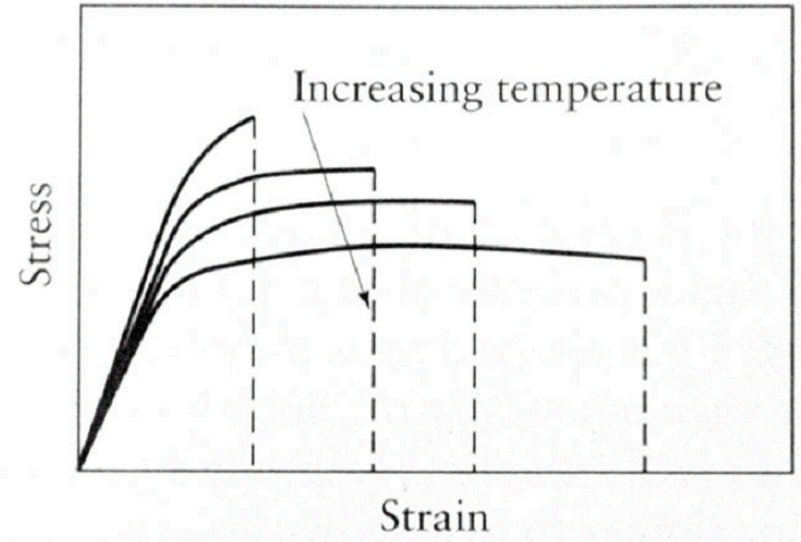
Macchina di prova universale idraulica da 100 kN, DARTEC, a destra, cella climatica per il condizionamento dei campioni



## Proprietà meccaniche tipiche per alcuni materiali

	E (GPa)	Y (MPa)	UTS (MPa)	Elongation in 50 mm (%)	Poisson's Ratio ( $\nu$ )
<b>METALS (WROUGHT)</b>					
Aluminum and its alloys	69-79	35-550	90-600	45-5	0.31-0.34
Copper and its alloys	105-150	76-1100	140-1310	65-3	0.33-0.35
Lead and its alloys	14	14	20-55	50-9	0.43
Magnesium and its alloys	41-45	130-305	240-380	21-5	0.29-0.35
Molybdenum and its alloys	330-360	80-2070	90-2340	40-30	0.32
Nickel and its alloys	180-214	105-1200	345-1450	60-5	0.31
Steels	190-200	205-1725	415-1750	65-2	0.28-0.33
Stainless steels	190-200	240-480	480-760	60-20	0.28-0.30
Titanium and its alloys	80-130	344-1380	415-1450	25-7	0.31-0.34
Tungsten and its alloys	350-400	550-690	620-760	0	0.27
<b>NONMETALLIC MATERIALS</b>					
Ceramics	70-1000	-	140-2600	0	0.2
Diamond	820-1050	-	-	-	-
Glass and porcelain	70-80	-	140	0	0.24
Rubbers	0.01-0.1	-	-	-	0.5
Thermoplastics	1.4-3.4	-	7-80	1000-5	0.32-0.40
Thermoplastics, reinforced	2-50	-	20-120	10-1	-
Thermosets	3.5-17	-	35-170	0	0.34
Boron fibers	380	-	3500	0	-
Carbon fibers	275-415	-	2000-5300	1-2	-
Glass fibers (S, E)	73-85	-	3500-4600	5	-
Kevlar fibers (29, 49, 129)	70-113	-	3000-3400	3-4	-
Spectra fibers (900, 1000)	73-100	-	2400-2800	3	-

Note: In the upper table, the lowest values for E, Y, and UTS and the highest values for elongation are for the pure metals.



- effetto della temperatura

**Modulo di Poisson:** un provino compresso diminuisce la propria lunghezza ma aumento il raggio, alla deformazione assiale  $\epsilon_a = \Delta l/l$  se ne associa una radiale  $\epsilon_r = \Delta r/r$ .  
Il rapporto tra la deformazione radiale e quella assiale definisce il modulo di Poisson:  $\nu = \epsilon_r/\epsilon_a$ .



## Forze tangenziali – tensione di taglio

- sistema di forze distribuito autoequilibrato;
- tensioni;
- risultante;
- componenti normale e tangenziale.

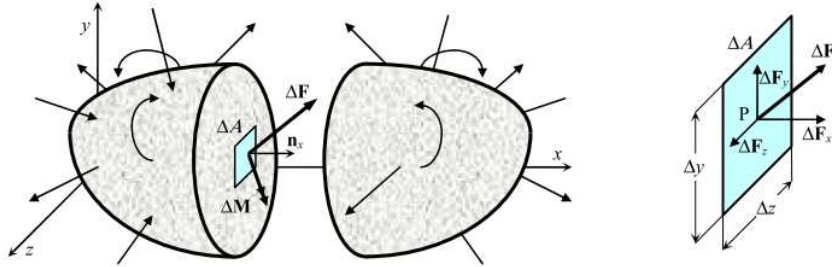
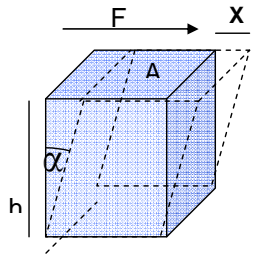


Fig.1.1 - Forze interne agenti su un elemento di superficie  $\Delta A$  in un solido caricato da forze esterne.

Quando la forza non è perpendicolare alla faccia di applicazione ma viene trasmessa tangenzialmente, si ha deformazione di taglio.

E.g.: torsione; forbici.

Nel caso di tensioni tangenziali le azioni giacciono sullo stesso piano di rottura e la modificazione del provino non sarà più uno stiramento ma una variazione di forma (generalmente a parità di volume).



A = superficie  
 h = altezza  
 X = deformazione lineare  
 $\alpha$  = angolo di scorrimento  
 $\tau = F/A$ , tensione tangenziale

$$\gamma = \text{deformazione di taglio} = X / h = \text{tg}(\alpha) \approx \alpha$$

Per materiali allo stato elastico lo sforzo di taglio  $\tau$  è proporzionale alla deformazione secondo un moltiplicatore G (modulo di taglio):

$$\tau = G \cdot \gamma$$

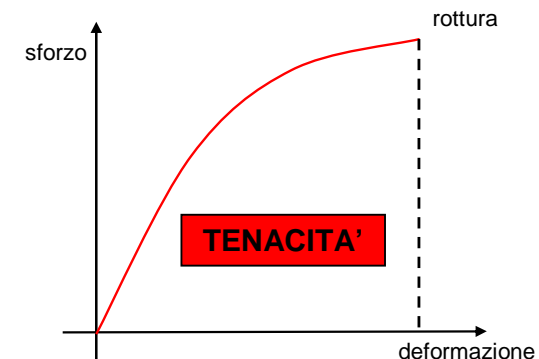
G = modulo di taglio

Considerando il campo delle piccole deformazioni (def. elastiche)  $G = E/2(1+\nu)$  dove  $\nu$  rappresenta il modulo di Poisson. Questa relazione è utile poiché in alcune situazioni risulta molto più comodo sperimentalmente ricavare il modulo di taglio G piuttosto che quello di elasticità E.

## Tenacità

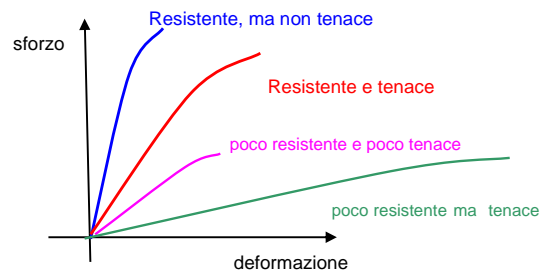
Corrisponde all'energia di deformazione, fino a rottura. Si calcola dunque come area sottesa dalla curva forza-spostamento o sulla curva tensione-deformazione (fornendo l'energia specifica).

$$E = \int_0^{S_r} F dS \quad e = \int_0^{\epsilon_r} \sigma d\epsilon$$



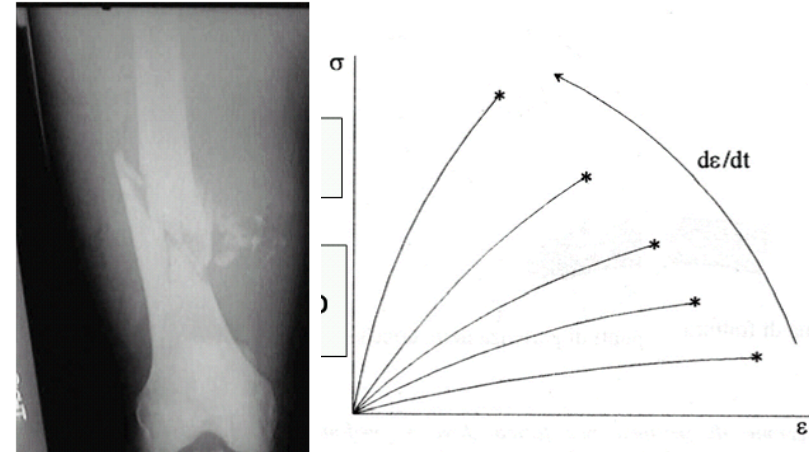
## Resilienza

La velocità di deformazione è un fattore infragilente. La sensibilità ai carichi dinamici (urti) può essere caratterizzata con la resilienza.



La curva blu è la curva sforzo-deformazione per un campione resistente, ma non tenace. Come si può vedere ci vuole molta forza per romperlo, ma non molta energia, vista la piccola area sotto la curva. Quindi questo campione non si deforma significativamente prima di rompersi (stato di fragilità).

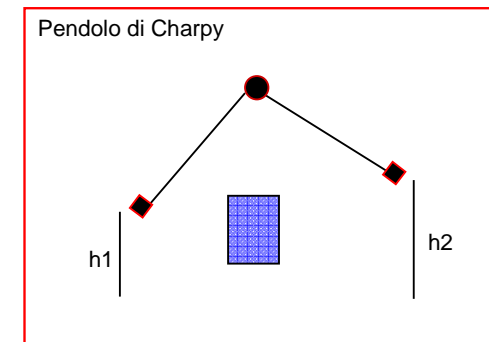
D'altra parte la curva rossa è la curva sforzo-deformazione per un campione sia resistente che tenace. Questo materiale non è resistente quanto quello della curva in blu, ma l'area sotto la curva rossa è maggiore di quella sotto la blu, cioè assorbe più energia del campione blu. Il campione rosso assorbe più energia di quello blu, si deforma molto di più del precedente, prima di rompersi, quindi la deformazione permette al campione di dissipare energia. Se un campione non si può deformare, l'energia non viene dissipata e porta alla rottura del campione.



- per basse velocità di deformazione il comportamento dei materiali tende ad essere plastico;
- per alte velocità di deformazione il comportamento del materiale tende ad essere fragile.

Per un determinato materiale la misura della resilienza viene determinata mediante prove strumentali, ovvero si sottopone un provino ad un urto causato da una massa pendolare (pendolo di Charpy). Si lascia cadere la massa da un'altezza sufficiente a rompere il provino e la misura della resilienza è data dal rapporto tra l'energia dissipata nella rottura e la sezione del provino.

$$mg \cdot (h_1 + h_2) = E$$



**Circoli di Mohr**

- Variazione delle componenti tensionali in un punto al variare della giacitura del piano di riferimento;

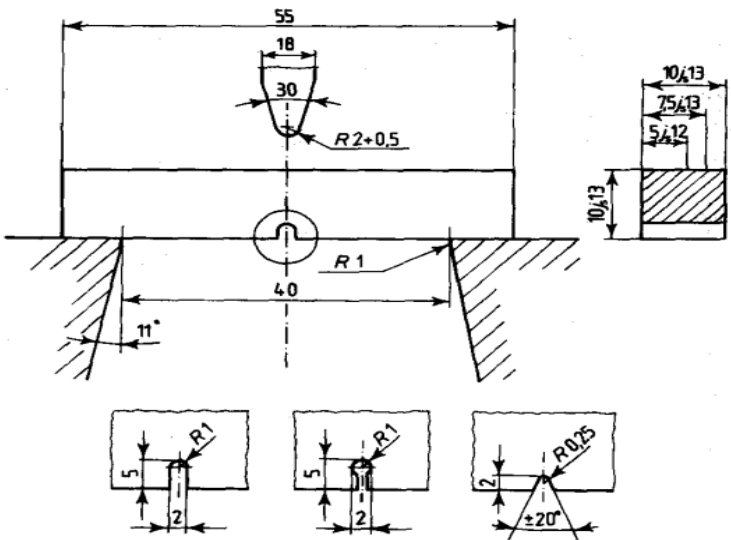
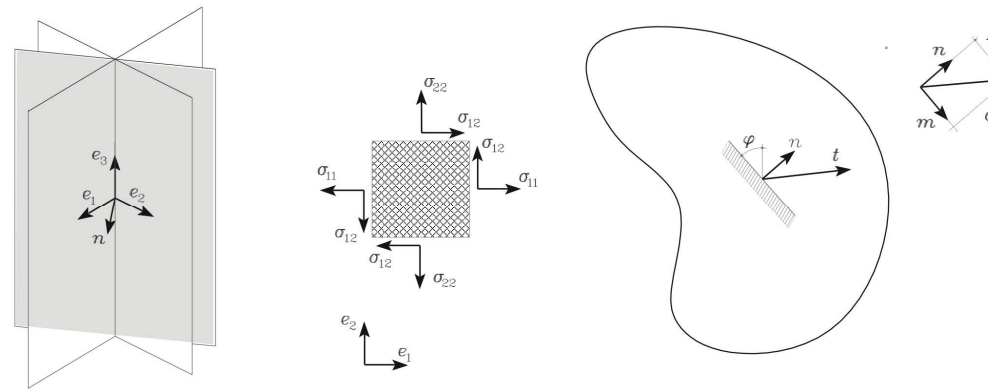


Figura 5: Provini per prove di resilienza

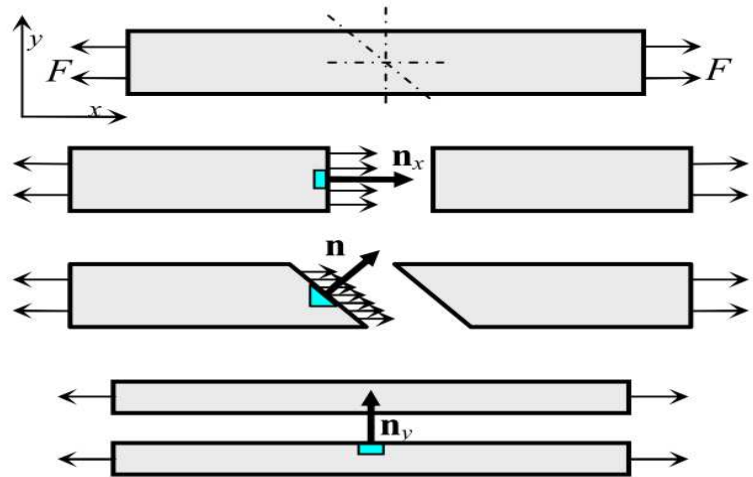
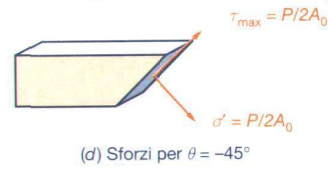
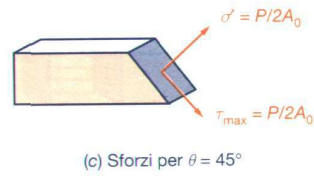
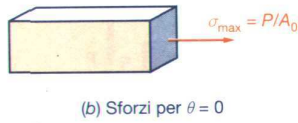
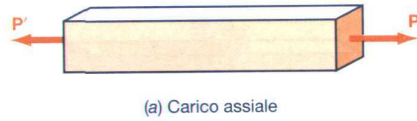


Fig.1.3 - Variazione della tensione al variare del piano di sezione in una barra soggetta a trazione.

- tensioni principali e Circolo di Mohr



$$F = P \cos(\theta)$$

$$V = P \sin(\theta)$$

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta}$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2(\theta) \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin(\theta) \cos(\theta)$$

tensione monoassiale:

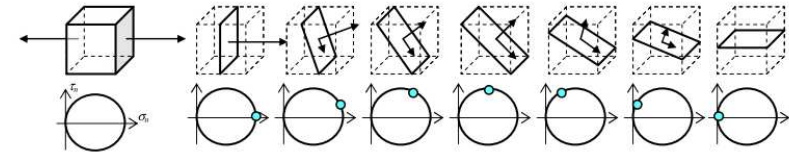


Fig.1.7 – Posizione delle coppie  $\sigma$  e  $\tau$  sul cerchio di Mohr al variare della giacitura nel caso di stato tensionale monoassiale.

tensione biassiale:

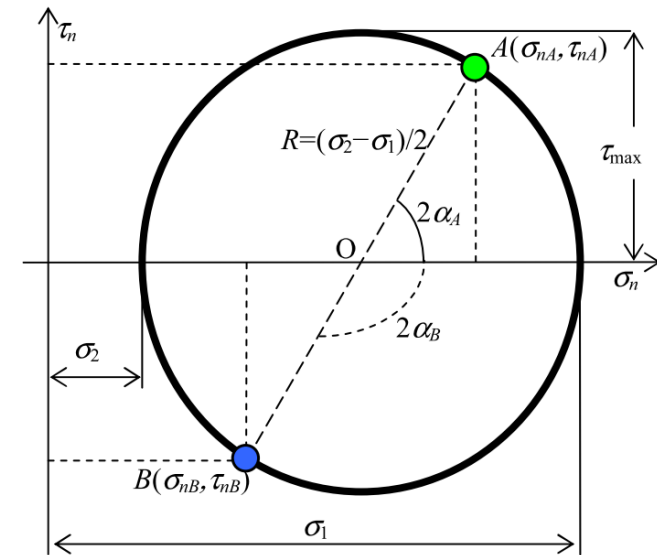
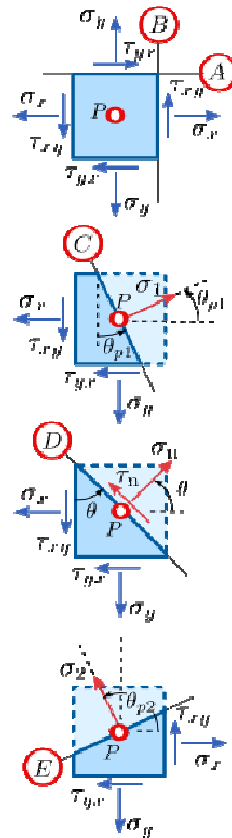
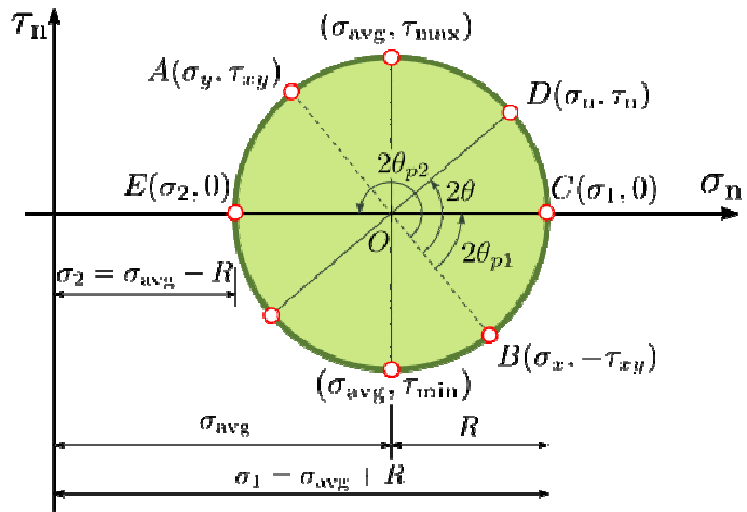


Fig.1.8 – Il cerchio di Mohr



$$\tau_n = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- esempi: trazione/compressione monoassiale; taglio per torsione