LA PLASTICITÀ DEL TERRENO

Programma della lezione

1) Comportamento meccanico del terreno (Ripasso)
2) Rappresentazione degli stati di tensione - Circolo di Mohr
3) Stati attivi e passivi di Rankine

1) Comportamento meccanico del terreno

<u>Tensione e deformazione</u>

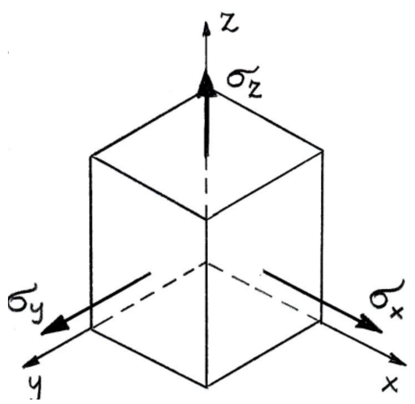
$$Tensione = \frac{Forza}{Superficie} = \frac{N}{m^2}$$

Le tensioni possono essere di due tipologie → Normali e Tangenziali

Le <u>tensioni normali</u> agiscono perpendicolarmente alla superficie del materiale.

Vengono indicate con la lettera σ

σx, σy, σz → indicano la direzione in cui agiscono oppure la direzione a cui è perpendicolare la superficie su cui agiscono.



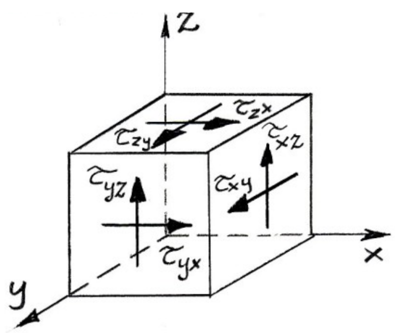
Possono produrre *trazione* (tensioni positive) o *compressione* (tensioni negative).

Le <u>tensioni tangenziali</u> agiscono parallelamente alla superficie del materiale.

Vengono indicate con la lettera τ.

τxy → giace su un piano perpendicolare a x ed è diretta come y.

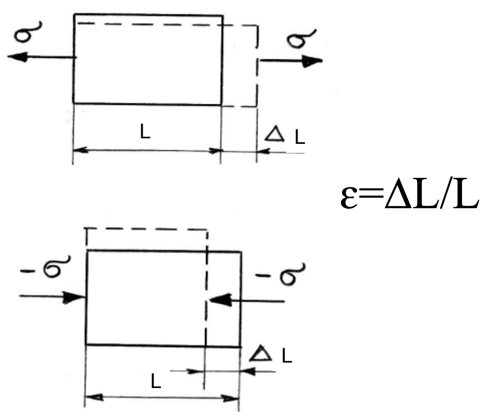
Su ciascuna faccia possono quindi agire due tensioni tangenziali che sono le componenti nelle direzioni degli assi coordinati: τxy, τxz, τyx. τyz, τzx, τzy.



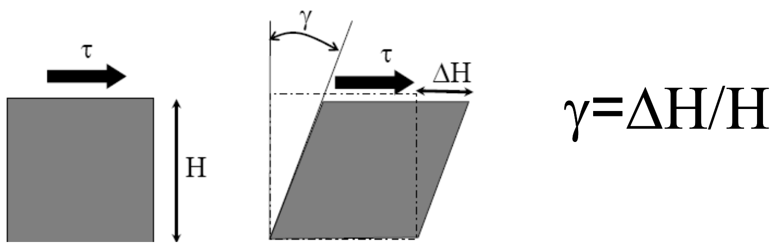
Effetto delle tensioni → Deformazioni (adimensionali) → Sono legati alle tensioni normali→ ALLUNGAMENTI, ACCORCIAMENTI

$$Deformazione = \frac{Variazione \cdot di \cdot lunghezza}{Lunghezza \cdot iniziale} = \frac{\Delta L}{L}$$

Allungamenti e accorciamenti →

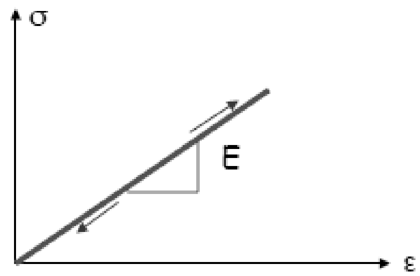


Effetto delle tensioni → se il materiale non subisce variazioni di lunghezza ma le superfici che lo delimitano subiscono una variazione di angolo → SCORRIMENTI



Il comportamento meccanico del terreno è espresso da relazioni rappresentanti il legame tra le tensioni applicate e le deformazioni subite.

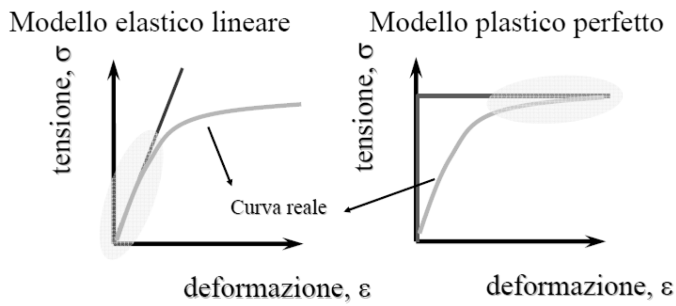
Comportamento elastico → Corrispondenza biunivoca tra incrementi di tensione e di deformazione. Le deformazioni prodotte dalle tensioni scompaiono una volta rimosse quest'ultime (il lavoro svolto dagli sforzi esterni per un incremento di deformazione viene immagazzinato e restituito allo scarico, cioè tutte le deformazioni sono restituite se l'incremento di carico che le ha prodotte viene rimosso) → deformazioni reversibili.



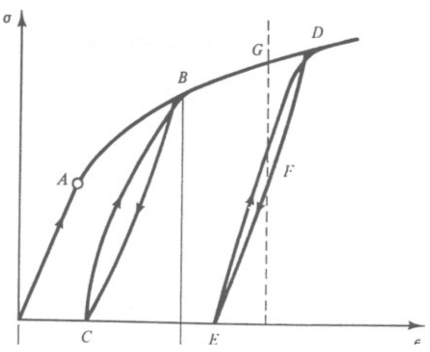
La teoria dell'elasticità non è sufficiente a descrivere in maniera compiuta il comportamento reale dei terreni → non è in grado di descrivere le deformazioni permanenti che si evidenziano nei terreni quando si arriva a rottura → teoria della plasticità

Plasticità → deriva da una parola greca che significa "plasmare". Esiste una soglia di sollecitazione (snervamento) oltre la quali si manifestano deformazioni plastiche (permanenti) il lavoro svolto dalle tensioni viene dissipato e le deformazioni non sono recuperate.

Modelli costruttivi semplici



Il comportamento tensio-deformativo di un terreno è fortemente non lineare ed elasto-plastico.

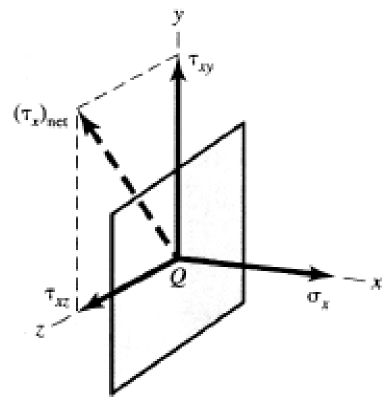


Incrementando il carico gradualmente, il materiale manifesta un comportamento di tipo elastico fino al punto A → il materiale recupera la sua configurazione iniziale quando il carico esterno viene rimosso.
Se la tensione supera il livello A e raggiunge, ad esempio, il punto B, quando il carico esterno viene rimosso ci sarà una deformazione residua che non può essere recuperata.
La tensione corrispondente al punto A, raggiunto il quale iniziano le deformazioni plastiche, è definita tensione di snervamento o di plasticizzazione.

Se a partire dal punto C il provino viene ricaricato, esso manifesta un comportamento elastico fino al raggiungimento del livello tensionale B, dopo di che si ha nuovamente un comportamento elasto-plastico.

2) Rappresentazione degli stati di tensione

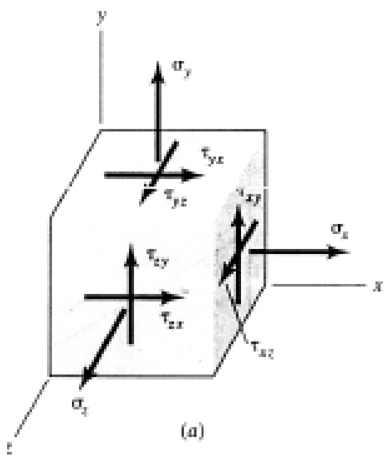
E' possibile definire (nel punto Q considerato) una componente diretta come la normale alla superficie (tensione normale, σ di trazione se la direzione è uscente dalla superficie e di compressione se entrante) ed una componente tangenziale (tensione tangenziale τ). La tensione tangenziale τ può essere scomposta nelle due componenti secondo le direzioni y e z, ossia τxy e τxz.



Per descrivere completamente lo stato tensionale in un punto sarebbe necessario considerare tutte le infinte superfici passanti per quel punto.

Un modo agevole per ottenere rapidamente lo stesso risultato è quello di fare ricorso al metodo che fa impiego della trasformazione delle coordinate, o dei Cerchi di Mohr.

Si considerino due sezioni condotte per il punto Q ma stavolta perpendicolarmente alle direzioni y e z. Lo stato di tensione è ora rappresentato considerando tre superfici mutuamente perpendicolari che individuano un cubetto.



<u>Sulla faccia avente come normale la direzione x</u>

σx (tensione normale diretta come l'asse x)

τxy (tensione tangenziale appartenente al piano avente normale diretta come l'asse x e diretta secondo l'asse y)

τxz (tensione tangenziale appartenente al piano avente normale diretta come l'asse x e diretta secondo l'asse z)

<u>Sulla faccia avente come normale la direzione y</u>

σy (tensione normale diretta come l'asse y)

τyx (tensione tangenziale appartenente al piano avente normale diretta come l'asse y e diretta secondo l'asse x)

τyz (tensione tangenziale appartenente al piano avente normale diretta come l'asse y e diretta secondo l'asse z)

<u>Sulla faccia avente come normale la direzione z</u>

σz (tensione normale diretta come l'asse z)

τzy (tensione tangenziale appartenente al piano avente normale diretta come l'asse z e diretta secondo l'asse y)

τzx (tensione tangenziale appartenente al piano avente normale diretta come l'asse z e diretta secondo l'asse x)

La conoscenza delle tensioni agenti su tre piani mutuamente perpendicolari è sufficiente per conoscere lo stato tensionale su qualunque superficie passante per il punto considerato.

Stato di tensione tridimensionale → definito da nove componenti.

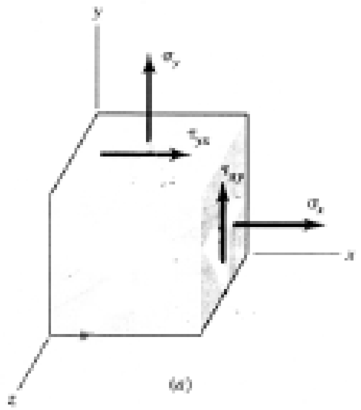
Ma le tensioni che puntano verso lo stesso spigolo o da esso si allontanano, sono uguali →

$\tau xy = \tau yx$, $\tau xz = \tau zx$, $\tau zy = \tau yz$ → 6 componenti di tensione necessarie per conoscere lo stato tensionale.

Stati piani di tensione

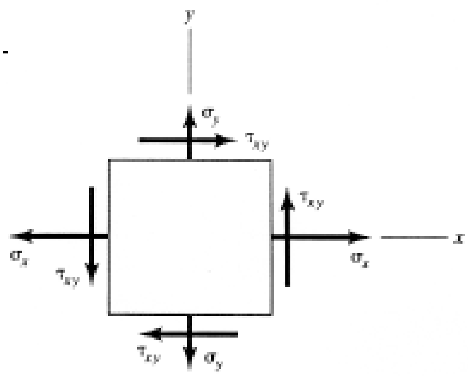
Le tensioni agenti su una delle tre superfici sono nulle →

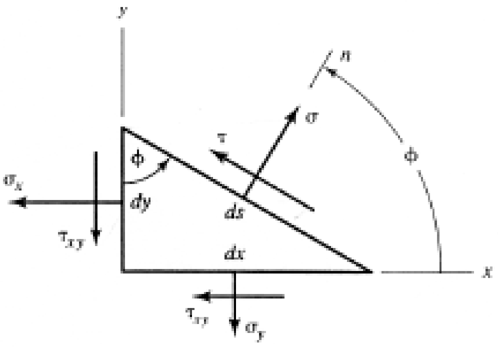
σz = τzx = τzy = 0 →



Ricaviamo i cerchi di Mohr per uno stato tensionale piano

Supponiamo di tagliare l'elementino in figura con un piano obliquo avente normale n, inclinato di un angolo arbitrario ϕ misurato in senso antiorario a partire dalla direzione positiva dell'asse x





Presenza di tensioni normali e tangenziali che agiscono su tale piano obliquo.

Ponendo uguale a zero la somma di tutte le forze associate alle componenti di tensione →

Equazioni di trasformazione per uno stato piano di tensione:

$$\begin{cases} \sigma = \left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi \\ \tau = -\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi \end{cases}$$

Derivando l'equazione che esprime la tensione normale rispetto a ϕ ed uguagliando a zero →

$$\tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Questa equazione è soddisfatta per due valori dell'angolo ϕ_p uno dei quali definisce la massima tensione normale σ_1 e l'altro la minima tensione normale σ_2. → **Direzioni Principali**.

Tali direzioni corrispondono agli angoli:

$$\frac{1}{2} arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

L'angolo tra le direzioni principali è di 90°.

I piani che contengono le **tensioni principali** hanno tensioni tangenziali nulle

Derivando l'equazione che esprime la tensione tangenziale rispetto a ϕ ed uguagliando a zero →

$$\tan 2\phi_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Questa equazione è soddisfatta per due valori dell'angolo ϕ_s in corrispondenza dei quali la tensione tangenziale τ raggiunge i valori massimi .

L'angolo tra i piani sui quali giacciono le massime tensioni tangenziali è di 90°.

i piani che contengono le massime tensioni tangenziali e i piani che contengono le tensioni principali formano un angolo di ± 45°.

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

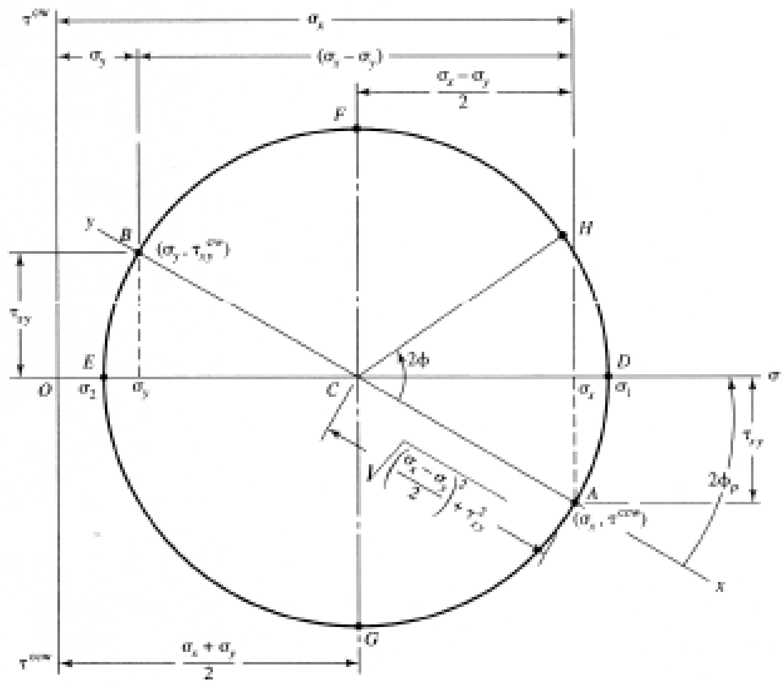
Le equazioni di cui sopra sono equazioni parametriche di una circonferenza in σ e τ dove il parametro è 2ϕ.

$$C(centro) = (\sigma, \tau) = \left[\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right), 0\right]$$

$$R(raggio) = \left[\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}) + \tau_{xy}^2} \right]$$

Il piano cartesiano σ ,τ nel quale si rappresentano le circonferenze prende anche il nome di Piano di Mohr

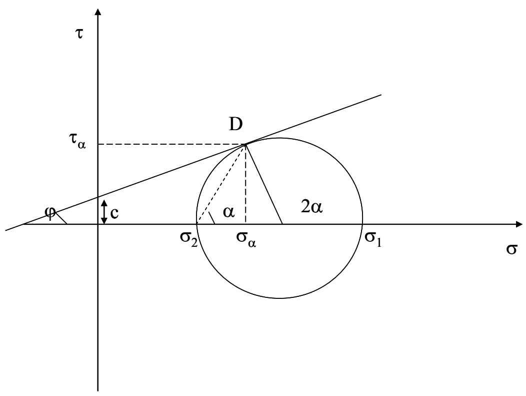
Il cerchio di Mohr rappresenta lo stato tensionale in un singolo punto della struttura, ed ogni suo punto rappresenta lo stato tensionale relativo ad un piano che interseca la struttura nel punto considerato.



I punti disposti a 180° l'uno rispetto all'altro sul cerchio di Mohr rappresentano lo stato tensionale su due facce a 90° dell'elementino. Le intersezioni del cerchio di Mohr con l'asse delle σ individuano le tensioni principali.

<u>Criterio di rottura di Mohr-Coulomb</u>

Esiste un punto sul cui piano si verifica una combinazione critica di tensioni (σ_α e τ_α), punto D del cerchio di Mohr da cui parte la rottura per poi estendersi ad altri. Tra le due tensioni principali (σ_1 e σ_2) che portano a rottura il provino vale la relazione:



$$\sigma_1 = \sigma_2 N\varphi + 2c\sqrt{N\varphi}$$

$$N\varphi = tg^2(45° + \frac{\varphi}{2})$$

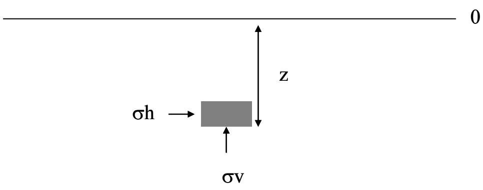
La linea dei punti di rottura è definita retta di Coulomb → $\tau = c + \sigma tg\varphi$

<u>C= coesione e φ= angolo di attrito</u>

<u>Stati di Rankine (Attivo e Passivo) per valori di umidità compresi tra il limite liquido ed il limite plastico</u>.

Consideriamo un elemento di terreno posto alla profondità z sulle cui superfici agiscono solo tensioni principali.

Sulla base del provino agirà una tensione dovuta al peso del terreno di altezza z.

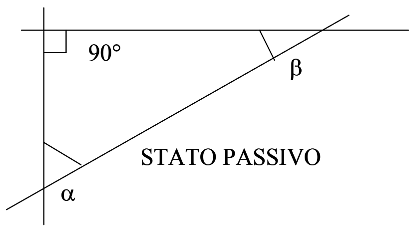


1)Se a partire da una condizione di equilibrio si provoca un avvicinamento delle superfici verticali (sotto l'azione di un utensile) ne consegue un aumento della tensione σh mentre resta costante σv.

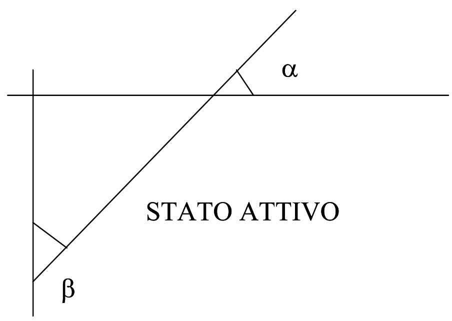
In tali condizioni (secondo Mohr)→
σh sarà la tensione principale maggiore σ_1
σv sarà la tensione principale minore σ_2

Quando σh raggiunge il valore massimo compatibile con l'equilibrio avremo (ricordando che $\sigma_1 = \sigma_2 N\varphi + 2c\sqrt{N\varphi}$):

$\sigma_1 = \sigma h = \sigma v N\varphi + 2c\sqrt{N\varphi} = \rho_a \cdot g \cdot z N\varphi + 2c\sqrt{N\varphi}$



Il piano di rottura sarà inclinato di $\alpha = 45° + \frac{\varphi}{2}$ rispetto al piano sul quale agisce la tensione maggiore, cioè quello verticale. In altri termini il piano di rottura è inclinato rispetto alla orizzontale dell'angolo $\beta = 90° - (45° + \frac{\varphi}{2}) = 45° - \frac{\varphi}{2}$



2) Nel caso in cui, a partire dall'equilibrio, si produce una compressione sulla superficie orizzontale e quindi un allontanamento delle superfici verticali del terreno, la tensione principale maggiore sarà quella verticale σv mentre quella minore sarà σh → σv= σ_1 e σh = σ_2. In queste condizioni il piano di rottura sarà inclinato dell'angolo $\alpha = 45° + \frac{\varphi}{2}$ rispetto al piano sul quale agisce la tensione principale che è quello orizzontale.

I due stati di Rankine rappresentano i due stati di equilibrio della sabbia; ogni stato intermedio, viene indicato come stato di equilibrio elastico.

Poiché lo sforzo principale verticale σv nella massa di sabbia può essere sia maggiore che minore, il rapporto $\frac{\sigma h}{\sigma v}$ può assumere qualsiasi valore fra i limiti

Min: $KA = \frac{\sigma h}{\sigma v} = \frac{1}{N\varphi} = tg^2\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) \rightarrow$ stato attivo

Max: $Kp = \frac{\sigma h}{\sigma v} = \frac{1}{N\varphi} = tg^2\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \rightarrow$ stato passivo

In un deposito naturale o artificiale di sabbia K presenta un valore intermedio K_0 compreso fra i due limiti K_A e K_p.

$\sigma h = K_0 \, \sigma v$

K0 → coefficiente empirico, noto come coefficiente di spinta della terra allo stato di quiete il cui valore dipende dalla massa volumica della sabbia e dal percorso di sedimentazione da esso subito. Assume valori compresi tra 0.4 e 0.8 rispettivamente per sabbie non compattate e compattate.